

Θεωρία Συστημάτων Εξυπηρέτησης.

1 βιβλίο Εύδοτος: Ουρές αναμονής.

Συστήματα Εξυπηρέτησης: μαθηματικό πρότυπο για τη μοντελοποίηση ενός πραγματικού συστήματος εισόδου-εξόδου πελάτη, στο οποίο υπεισέρχεται τυχασιότητα.

Ποσοτική μελέτη των συστημάτων εξυπηρέτησης.
ουρές αναμονής, κινηματογράφο, τράπεζα, τηλ. κέντρο.

Ενδεικτικά θα απαντήσουμε σε προβλήματα (ερωτήματα) του τύπου:

Πόσο περιμένει στην ουρά ο πελάτης κατά μέσο όρο;
Πόσο είναι το μήκος της ουράς κατά μέσο όρο;

ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ.

Ένα σύστημα εξυπηρέτησης αποτελείται από:

1) Χώρος αναμονής → απεριόριστη χωρητικότητα (πχ στάση λεωφορείου)
↳ περιορισμένη (πχ parking)

(χώρος όπου οι πελάτες καταφθάνουν και παραμένουν σε κάποια ουρά για να εξυπηρετηθούν)

πχ. Σε ένα γιατρίο: ο προδίαλος

• Στάση λεωφορείου

• Χώρος μπροστά από ένα ταμείο κλπ

[έχει να κάνει με τον πελάτη]

2) Κανάλια Εξυπηρέτησης.

πχ στην πυροσβεστική: πυροσβεστικές αντλίες στον πυροσβ σταθμό

τράπεζα: ταμεία στην τράπεζα

κλπ.

Βασικά χαρακτηριστικοί συστ. εξυγ. απο την μεριά του
μαθηματικού.

1. Διαδικασία αφίξεων

Οι αφίξεις γίνονται με κάποια τυχαιότητα. Εφαρμόζοντας μεθόδους της
στατιστικής μπορούμε να διαπιστώσουμε.

Αν έχουμε: σταθερούς χρόνους μεταξύ των αφίξεων (ντετερμινιστική
διαδικασία αφίξεων)

: ανεξάρτητες και ισόνομες αφίξεις με εκθετικούς χρόνους.
(Διαδικασία Poisson).

: ανεξάρτητες και ισόνομες με χρόνους που ακολουθούν
μια γενική κατανομή. (Ανανεωτική διαδικασία).

2. Χρόνοι εξυπηρέτησεων.

πχ σταθερός χρόνος, μπορεί να ακολουθεί εκθετική ή γενική κατανομή.

3. Πλήθος παράλληλων εξυπηρετητών

πχ τρέινα Εθνική (Μιχαήλ Αγγελού) έχει 2 ΑΤΜ

4. Χωρητικότητα του Συστήματος

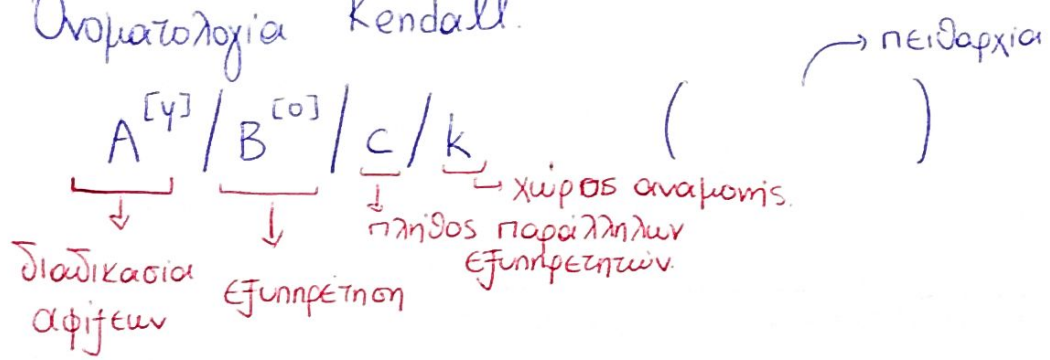
Πεπερασμένη χωρητικότητα — αν πελάτης βρει το χώρο αναμονής
γεμάτο φεύγει

5. Πειθαρχία του συστήματος.

FIFO (όποιος πάει πρώτος στο γραφείο θα φύγει και πρώτος αφού πρώτα εξυπρ.

- FILO (φέρει μπουτ (μπαίνει πρώτος - φεύγει πρώτος)
- LIFO (μπαίνει τελευταίος - φεύγει πρώτος)
- Service in Random Order (πχ πελάτες μιας αεροπορικής εταιρείας
τυχαίος τρόπος εξυπηρέτησης)
- Service with Priorities (εξυπηρέτηση με προτεριότητα)

Ονοματολογία Kendall.



Στην θέση A: κατανομή αφίξεων

- M = Poisson
- Er = Erlang
- G = general (γενική κατανομή)

$[\gamma]$: αριθμός πελατών αναί αφίξη.
 μπορεί να είναι < σταθερός αριθμός
 κατανομή

$$\left[\text{πχ } \frac{M}{M^{[1]}} \right]$$

B: κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης M = εκθετική
 G = general.

$[0]$: αριθμός πελατών αναί εξυπηρέτηση

C : αριθμός των παράλληλων εξυπηρέτητων

k : χωρητικότητα συστήματος

ΠΡΟΣΟΧΗ
 • Πολλές φορές χωρητικ συστήματος, εννοείται μαζί με τους υπαλλήλους

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ που θα μελετήσουμε

M/M/1/∞ (FIFO)
"
F_c F_s

αφίξεις με Poisson.

1 πηγή

1 πηγή εξυπηρετ. καθε φορά.

∞ χωρητικότητα.

M/M/m/k $k \geq m$

M/G/1

• Στοχαστική Διαδικασία:

οφείλουν την ανάπτυξη τους σε έναν φυσικό Brown (1827), παρατηρ. την κίνηση ενός σωματιδίου. μέσα σε υγρό.

Einstein (1905)

Wiener (1923)

Ορισμοί

Τυχαίο φαινόμενο: λέμε το φαινόμενο του οποίου η έκβαση είναι τυχαία
αλλά το αποτέλεσμα είναι δυνατό.

Δυναμικό φαινόμενο: το φαινόμενο που εξελίσσεται στο χρόνο.

Στοχαστική Διαδικασία: Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t \in T\}$

σ' ένα χώρο πιθανών $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

↓
δείχ
χώρος

↑ μέτρο πιθανότητας

Παρατήρηση

Η παραμέτρος t είτε μεταβ. σε ένα διάστημα, είτε παίρνει διακεκρ. τιμές.

πχ $t \in [0, 10]$ ή $t \geq 0$ $T = [0, \infty)$

Όταν T είναι διάστημα, λέμε ότι έχουμε στοχαστική διαδ. σε συνεχή χρόνο

Όταν T παίρνει διακριτά τιμές, τότε έχουμε σ.δ σε διακριτό χρόνο.

Χείρς καταστάσεων: Σύνολο των δυνατών τιμών της σ.δ
συμβολίζεται με S . Μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτός

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΩΡΟ	ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ ΣΥΝΕΧΗ ΧΩΡΟ
ΣΥΝΕΧΗ ΧΡΟΝΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΩΡΟ	ΣΥΝΕΧΗ ΧΡΟΝΟ ΣΥΝΕΧΗ ΧΩΡΟ

Μαρκοβιανή Ιδιότητα: Η ιδιότητα αυτή ικανοποιείται όταν το μέλλον
εξαρτάται από το παρόν και όχι από το παρελθόν.

$$t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$$

ΠΑΡΕΛΘΟΝ ΠΑΡΟΝ ΜΕΛΛΟΝ

$$P(X(t) = i / X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \dots, X(t_k) = i_k) = P(X(t) = i / X(t_k) = i_k)$$

Συμβολίζω $P_{ij}(u, t) = P(X(t) = j / X(u) = i)$ (πιθανότητα μετάβασης).
 $u < t$.

Ιδιότητα στατικότητας: Η πιθανότητα μετάβασης από $i \rightarrow j$ είναι
ανεξάρτητη από το χρόνο πραγματοποίησης
της μετάβασης.
Εξαρτάται μόνο από τις καταστάσεις και το
χρόνο που μεσολαβεί.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ - ΘΑΝΑΤΩΝ

Θεωρούμε μια σ.δ σε συνεχή χρόνο

$$\{X(t); t \geq 0\} \text{ και με τιμές στο μη αρνητικό ημιεπίπεδο } S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Συμβολίζω με $P_{ij}(t) = P(X(t+u)=j / X(u)=i)$ να πάω από το i στο j σε χρόνο t .

Επιπλέον οι αλλαγές των καταστάσεων καθορίζονται από τους εξής

κανόνες: 1) $P_{n, n+1}(dt) = \lambda_n dt + O(dt)$ — αμελητέοι όροι ως προς dt

όπου λ_n μια θετική παράμετρος (λ_n : ρυθμός γεννήσεων)

όπου $O(dt)$: όροι τ.ω. το $\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{O(dt)}{dt} = 0$ για $n=0, 1, 2, \dots$
(ήρθε 1 νελάτς)

2) $P_{n, n-1}(dt) = \mu_n dt + O(dt)$

όπου μ_n θετική σταθερά (μ_n : ρυθμός θανάτων) για $n=1, 2, \dots$
(έφυγε 1 νελάτς)

3). Δοθέντος ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση n την χρονική στιγμή t , η πιθανότητα ο συνολικός αριθμὸς γεν-θαν που θα συμβούν στο διάστημα $(t, t+dt)$ να είναι μεγαλύτερο του 1, είναι $O(dt)$.

$$P_{nj}(dt) = O(dt) \quad j \neq n+1, n, n-1$$

Συνεπώς ότι $P_{nn}(dt) = 1 - [(\mu_n + \lambda_n) dt + O(dt)]$ $n \neq 0$
 $n=1, 2, \dots$

$$P_{00}(dt) = 1 - [\lambda_0 dt + O(dt)]$$

Ερώτημα.

Έστω την χρονική στιγμή 0, η κατάσταση της διαδικασίας γεν-θάν είναι η $X(0)=i$.

Ποιά η $P_{in}(t) = P(X(t)=n / X(0)=i) = P_n(t)$.

$n=1,2,3$

$$P_n(t+dt) = P_{n-1}(t) \cdot P_{n-1 \rightarrow n}(dt)$$

+

$$P_{n+1}(t) P_{n+1 \rightarrow n}(dt)$$

+

$$P_n(t) P_{nn}(dt)$$

$$= P_{n-1}(t) [\lambda_{n-1} dt + O(dt)] + P_{n+1}(t) [\mu_{n+1} dt + O(dt)] + P_n(t) [1 - (\mu_n + \lambda_n) dt + O(dt)]$$

$n=0$
 $1 \rightarrow 0$
 $0 \rightarrow$

$$P_0(t+dt) = P_0(t) [1 - \lambda_0 dt + O(dt)] + P_1(t) [\mu_1 dt + O(dt)].$$

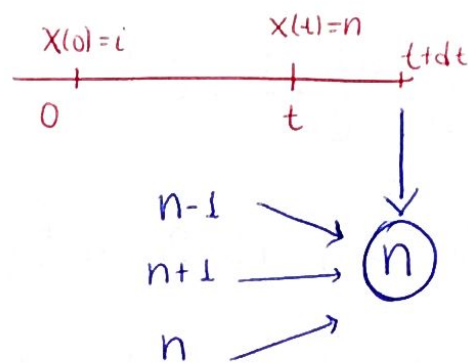
$$\frac{dP_n(t)}{dt} =$$

$$\frac{P_n(t+dt) - P_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t) \lambda_{n-1} + P_{n+1}(t) \mu_{n+1} - (\mu_n + \lambda_n) P_n(t).$$

για $n=1,2,3$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \frac{P_0(t+dt) - P_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + P_1(t) \mu_1 \quad \text{για } n=0$$

Άρα έχω ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων διαφορών 2^{ου} βαθμού.
 που δεν λύνεται.



$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \bar{P}_n. \quad (\text{συμβολισμός})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP_n(t)}{dt} \stackrel{n=0,1,2}{=} 0$$

$$0 = -\lambda_0 \bar{P}_0 + \mu_1 \bar{P}_1 \quad (1) \quad \left(\text{για } \frac{dP_0(t)}{dt} \right)$$

$$0 = \lambda_{n-1} \bar{P}_{n-1} + \mu_{n+1} \bar{P}_{n+1} - (\mu_n + \lambda_n) \bar{P}_n \quad \left(\text{για } \frac{dP_n(t)}{dt} \right)$$

$$\text{Από (1)} \quad \bar{P}_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \bar{P}_0$$

$$\bar{P}_2 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \bar{P}_0$$

$$\vdots$$

$$\bar{P}_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \bar{P}_0. \quad \text{για } n=1,2,\dots$$

$$\text{Το άθροισμα: } \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{P}_n = 1 \Rightarrow \bar{P}_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \bar{P}_0 + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \bar{P}_0 + \dots = 1.$$

$$\bar{P}_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right] = 1$$

$$\bar{P}_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right]^{-1}.$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΜΟΝΟ) ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ (ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ POISSON)

Υποθέτουμε ότι $\lambda_n = \lambda$ για $n=0,1,2,\dots$ και $\mu_n = 0$. (1)

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda_0 P_0(t) = \mu_1 P_1(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} + (\lambda_n + \mu_n) P_n(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) \quad n=1,2,\dots$$

Τότε βάσει (1) $\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda P_0(t) = 0$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t)$$

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda P_0(t) = 0 \\ \frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t) \\ \vdots \\ \frac{dP_n(t)}{dt} + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) \end{cases}$$

(2)

Z-μετασχηματισμός
ή
Γεννητρια συνλση
Μετασχ. Laplace.

(2) πολλαπλα με Z^0
 Z^1
 Z^2
 $\vdots$
 Z^n